

## Aula 1 - Equação de Poisson e Equação de Laplace na Eletrostática

O problema que queremos resolver é: Dada uma certa configuração estática de cargas, qual é o campo elétrico gerado por elas? O tratamento de problemas eletrostáticos em termos do campo elétrico é, por vezes, muito difícil. A Lei de Gauss, é verdade, revela-se uma ferramenta poderosa. Nos permite determinar a intensidade do campo elétrico em alguma região de interesse, mas com facilidade somente quando se pode identificar alguma simetria no sistema em estudo e quando se sabe a geometria do campo. A passagem para o tratamento em termos do *potencial elétrico*, que é uma estratégia mais sofisticada, é assertiva nesse aspecto e o objetivo desta aula é convencê-lo disso.

### A Equação de Poisson

A definição de potencial elétrico inspirada na Lei de Coulomb já é sabida. Para uma partícula de carga  $q$  e localizada em um sistema de referência pelo vetor  $\vec{r}'$ , já sabemos que o potencial elétrico gerado por ela em um ponto  $P$  localizado pelo vetor  $\vec{r}$  é

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1)$$

convencionado, é claro, que o potencial é nulo para  $r \rightarrow \infty$ .

A natureza escalar do potencial nos permite generalizá-lo para uma distribuição discreta de cargas qualquer. Se nesse sistema de referência houver  $N$  partículas carregadas com cargas, respectivamente,  $q_1, q_2, \dots, q_N$  e localizadas, também respectivamente, pelos vetores  $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_N$ , então o potencial elétrico gerado por elas no ponto  $P$  será

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}, \quad (2)$$

isto é, a soma dos potenciais que cada uma das cargas gera em  $P$  individualmente.

Estamos interessados em obter uma expressão semelhante a eq.(2), mas para uma distribuição contínua de cargas. Há muitas formas de fazê-lo e duas delas são as que seguem.

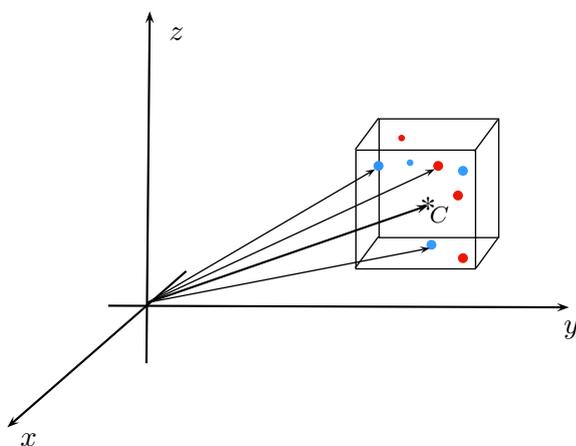


Figura 1: Cubo de centro em  $C$  ilustrando o reticulado contendo as cargas pontiformes.

(1) Suponhamos que as  $N$  cargas sejam encerradas por uma superfície fechada de volume  $V$ . Agora, esse número  $N$  é muito grande pois estamos interessado na passagem ao limite  $N \rightarrow \infty$ . Esse volume é aproximado por um reticulado de uma grande quantidade de cubinhos onde cada um deles contém uma infinidade de cargas pontuais. Um destes cubos está ilustrado na Figura 1. Localizamos cada cubo por um ponto, que pode ser o centro, digamos ponto  $C$  como na Figura 1, e cada carga pontiforme no interior desse cubo tem uma posição  $r_i$ . A posição do centro do cubo será dada pelo vetor  $\vec{r}_C$ .

A contribuição de cada cubo para o potencial gerado no ponto  $P$  pode ser calculada como sendo

$$\Delta\varphi_C(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_C \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|},$$

com as cargas  $q_i$  estando dentro do cubo centrado em  $C$ .

A ideia agora é aumentar o número de cubos do reticulado de modo que o volume  $\Delta V_C$  de cada cubo tenda a zero, mas que a soma deles seja fixa e igual ao volume  $V$ . Com isso, a distribuição de cargas no interior de cada cubinho colapsa no ponto  $C$ .

Sendo assim, podemos aproximar a contribuição do potencial para

$$\Delta\varphi_C(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_C \frac{q_i}{|r - r'_i|} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_C \frac{q_i}{|r - r_C|}$$

ou, sugestivamente, para

$$\Delta\varphi_C(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_C \frac{q_i}{|r - r_C|} \Delta V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_C \frac{q_i}{\Delta V_C}}{|r - r_C|} \Delta V_C$$

a fim de definir a *densidade de cargas* no cubo como

$$\rho(\vec{r}_C) = \sum_C \frac{q_i}{\Delta V_C}$$

e reescrever

$$\Delta\varphi_C(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}_C)}{|r - r_C|} \Delta V_C.$$

Somando todas as contribuições de potencial no ponto  $P$  de todos os cubos no reticulado e passando o limite ficamos, finalmente, com

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV}, \quad (3)$$

que é o potencial elétrico gerado no ponto localizado em  $\vec{r}$  pela distribuição contínua de cargas de densidade  $\rho$ . A variável  $r'$  mapeia todos os pontos no interior do volume  $V$ .

É claro que tal procedimento é apenas uma boa ideia que deve funcionar (e funciona) para chegar na expressão (3), mas é suficiente para concluir, ao compará-la com a expressão obtida anteriormente,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{E}(r')}{|r - r'|} dV,$$

que  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ . Disso, como  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , temos a conhecida **Equação de Poisson**:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}}. \quad (4)$$

Uma segunda maneira de chegar a Eq. de Poisson sem passar pela expressão (3) é pela Lei de Gauss.

(2) Supondo posta a região continuamente carregada de densidade de cargas  $\rho$ , podemos envolvê-la em uma superfície fechada  $S$  de volume  $V$ . O campo elétrico nos pontos dessa superfície obedece a Lei de Gauss, que é

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q_S}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

onde  $q_S$  é a carga total envolvida pela superfície  $S$  que tem  $\hat{n}$  como vetor normal. Aplicando o Teorema da Divergência na integral de superfície, identificando a carga total envolvida em termos da densidade de carga, a saber,  $q_S = \int_V \rho dV$  e reescrevendo  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ , chegamos em

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \int_V \left( \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon} \right) dV = 0 \Rightarrow \int_V \left( \nabla^2 \varphi + \frac{\rho}{\epsilon} \right) dV = 0,$$

que deve valer em um volume arbitrário. Portanto, o integrando deve ser identicamente nulo e, disso, obtemos a Eq. de Poisson exatamente como escrita em (4).

## Teorema de Unicidade

A Eq. de Poisson sozinha não determina o potencial eletrostático univocadamente. É uma equação diferencial parcial, linear, de segunda ordem e, em geral, não homogênea e, portanto, precisa ser acompanhada de um conjunto consistente de condições de contorno. A sua utilidade vem do fato de que tais condições de contorno existem e a solução da equação associada a esse contorno adequado é *única*. Pode parecer uma característica não muito surpreendente, mas acaba sendo essencial para resolver uma infinidade de problemas baseados no que se chama de Método das Imagens.

Como concluir que, dada uma condição de contorno específica, a solução da Eq. de Poisson associada a densidade de cargas  $\rho$  é única? Uma maneira é a que segue. Suponha que para uma certa configuração contínua de cargas de densidade  $\rho$  estão associadas à Eq. de Poisson duas soluções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Se tomarmos a função  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , então esta função deve obedecer a *Equação de Laplace*

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (6)$$

pois, como a Eq. de Poisson é linear, segue de  $\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon}$  e  $\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon}$  que  $\nabla^2(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$ .

Multiplicando a equação (6) por  $\varphi$  e integrando sobre uma superfície fechada  $S$  que encerra um volume qualquer  $V$ , ficamos com a identidade

$$\int_V \varphi \nabla^2 \varphi dV = 0.$$

Guardemos-lá por um momento. A regra do produto nos permite afirmar, dada uma função escalar  $f$  e uma vetorial  $F$ , que

$$\nabla \cdot (fF) = \nabla f \cdot F + f \nabla \cdot F,$$

de onde, tomando  $F = \nabla f$ , segue a identidade

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \nabla^2 f \quad \text{ou, sugestivamente,} \quad f \nabla^2 f = \nabla \cdot (f \nabla f) - (\nabla f)^2.$$

Usando essa última identidade na integral identicamente nula que montamos, ficamos com

$$0 = \int_V \varphi \nabla^2 \varphi dV = \int_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV - \int_V (\nabla \varphi)^2 dV,$$

que se reescreve, segundo o Teorema da Divergência, para

$$0 = \oint_S \varphi \nabla \varphi \cdot \hat{n} dS - \int_V (\nabla \varphi)^2 dV \Rightarrow \int_V (\nabla \varphi)^2 dV = \int_S \varphi \nabla \varphi \cdot \hat{n} dS$$

A integral de superfície envolvida na última passagem captura os valores de  $\varphi$  e de  $\nabla \varphi \cdot \hat{n}$  nos pontos que se localizam exatamente sobre a superfície fechada  $S$ . É este o fato crucial para o teorema da unicidade. Se escolhermos que as soluções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  obedecem a mesma condição de contorno  $\varphi_1(S) = \varphi_0(S) = \varphi_2(S)$  ou  $\nabla \varphi_1 \cdot \hat{n}(S) = \nabla \varphi_0(S) \cdot \hat{n} = \nabla \varphi_2 \cdot \hat{n}(S)$ , então ou  $\varphi(S) = 0$  ou  $\nabla \varphi \cdot \hat{n}(S) = 0$ . Assim, a integral de superfície é identicamente nula e resta a igualdade

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

para qualquer volume arbitrário  $V$ . O integrando dessa última integral é uma função não-negativa e, portanto, a única maneira de a integral anular-se é tendo  $\nabla \varphi = 0$  em todo o espaço contido em qualquer volume  $V$ . Ora, isso só pode acontecer se  $\varphi$  for uma função constante em qualquer conjunto conexo do  $\mathbb{R}^3$ . Assim, concluímos que  $\varphi = \text{const.}$  e, disso, as soluções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  associadas a uma mesma distribuição de cargas que tem as mesmas condições de contorno só podem diferir, no máximo, de uma constante.

Sendo assim, a solução de  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$  é única uma vez munida de uma condição de contorno do tipo  $\varphi(S) = \varphi_0(S)$  ou  $\nabla \varphi \cdot \hat{n}(S) = \nabla \varphi_0 \cdot \hat{n}(S)$ .

## 1° - PARTÍCULA EM REPOUSO ENTRE PLANOS CONDUTORES

Consideremos uma partícula puntual, de carga  $q$  e localizada em algum ponto entre dois planos condutores, distantes de  $L$  e mantidos a potenciais elétricos fixos  $V_1$  e  $V_2$ , como mostra a Figura 1 ao lado.

Estamos interessados em calcular o campo elétrico nesse arranjo. Para isso, vamos investigar primeiramente como é o potencial elétrico na região entre os planos e, então, obter o campo elétrico.

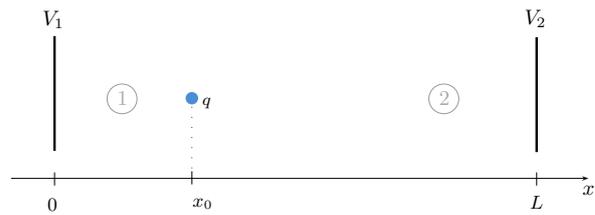


Figura 2: Carga puntiforme entre planos condutores.

Consideremos o caso unidimensional. Se  $\varphi$  é função de uma única variável, a eq.(4) se reduz a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem<sup>1</sup> que é, neste nosso problema,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x - x_0), \quad (7)$$

onde se escolheu localizar a partícula em um ponto  $x = x_0$ , com  $0 < x_0 < L$ , e  $\delta(x)$  é a função Delta de Dirac<sup>2</sup>. Munida das condições de contorno  $\varphi(0) = V_1$  e  $\varphi(L) = V_2$ , sabemos que a eq.(7) tem solução única. Vamos obtê-la.

A natureza da função delta nos obriga a estudar a equação (7) em duas regiões separadamente: uma região 1, que é  $0 \leq x < x_0$ , onde  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$  e uma região 2, que é  $x_0 < x \leq L$ , onde também  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$ . Em ambas as regiões (ilustradas na Figura 1) a solução geral da equação de potencial é uma função polinomial de primeiro grau. Tomemos

$$\varphi_1(x) = a_1 x + b_1, \quad \text{para } 0 \leq x < x_0, \quad (8)$$

$$\varphi_2(x) = a_2 x + b_2, \quad \text{para } x_0 < x \leq L, \quad (9)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são constantes determinadas, entre outros, pelas condições de contorno.

A condição de contorno  $\varphi(0) = V_1$  deve ser imposta sobre a solução na região 1, pois  $x = 0$  pertence a ela. Assim,

$$\varphi_1(0) = a_1 \cdot 0 + b_1 \Rightarrow \boxed{b_1 = V_1.}$$

Já a condição de contorno  $\varphi(L) = V_2$  deve ser imposta sobre a solução na região 2, pois  $x = L$  agora pertence a região 2. Assim,

$$\varphi_2(L) = a_2 L + b_2 \Rightarrow \boxed{a_2 L + b_2 = V_2.}$$

Atualizando as soluções (8) e (9) com  $b_1$  e  $b_2$  calculados acima, segue

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + V_1, & x \in [0, x_0) \\ a_2 (x - L) + V_2, & x \in (x_0, L] \end{cases} \quad (10)$$

e resta somente  $a_1$  e  $a_2$  a determinar.

As constantes  $a_1$  e  $a_2$  podem ser determinadas estudando como se comporta o potencial e a sua derivada primeira exatamente no ponto  $x = x_0$ . Começemos estudando a derivada primeira.

<sup>1</sup>No caso unidimensional o operador laplaciano é  $d^2/dx^2$ .

<sup>2</sup>Lembre-se que a *distribuição* delta representa a densidade de carga de uma carga puntiforme, já que  $Q_{total} = \int_V \rho dV$ .

Já sabemos que a primeira derivada do potencial é  $a_1$  em todos os pontos da região 1 e é  $a_2$  em todos os da região 2. Mas, precisamos obter informações sobre ela exatamente no ponto  $x_0$ . Para isto, basta que integremos uma vez em relação a  $x$  a equação (7). A integral deve ser calculada dentro de uma vizinhança que contenha  $x_0$  e, em seguida, podendo controlar o tamanho dessa vizinhança, devemos “colapsa-la” no ponto  $x_0$ . Obteremos, assim, informações sobre a derivada do potencial exatamente em  $x_0$ , como queríamos.

É simples. Podemos pegar um  $\varepsilon > 0$ , cercar o ponto  $x_0$  em algum intervalo de tamanho controlável por esse  $\varepsilon$ , por exemplo,  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , calcular

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x - x_0) dx$$

e em seguida tomar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Fica assim:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x - x_0) dx \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0+\varepsilon} - \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x_0-\varepsilon} \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{q}{\epsilon_0} \cdot 1 \right] \\ \boxed{a_2 - a_1 = -\frac{q}{\epsilon_0}}. & \end{aligned} \quad (11)$$

Isso porque:  $x_0 + \varepsilon$  está na região 2, onde a derivada de  $\varphi$  é o  $a_2$ ; já  $x_0 - \varepsilon$  está na região 1, onde a derivada de  $\varphi$  é o  $a_1$ ; e a integral da Delta no intervalo que contém o  $x_0$ , que é o ponto onde ela não é zero, é 1.

Reparando em (11), você deve notar que a derivada do potencial tem uma *descontinuidade* no ponto onde se localiza a carga, e o valor dessa descontinuidade se relaciona com o valor da carga. Sendo a derivada do potencial, basicamente, o próprio campo elétrico, como já sabemos que (a componente normal do) o campo elétrico é descontínua nos pontos onde há densidade de cargas não nula, esse resultado é esperado.

Outro resultado esperado é a continuidade do potencial. É claro que para  $0 \leq x < x_0$  e  $x_0 < x \leq L$  o potencial é uma função contínua. Mas precisamos, ainda, nos preocupar com o ponto  $x = x_0$ , pois a eq. (11) só relaciona a constante  $a_1$  com a  $a_2$ , não nos fornecesse o valor de cada uma delas individualmente. Para estudar o potencial nesse ponto basta que, agora, integremos a equação (7) duas vezes com respeito a  $x$  naquele intervalo contendo o  $x_0$  e de tamanho controlável. Tomando o limite, teremos informação sobre a própria função potencial em  $x_0$ . Fica assim:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x - x_0) dx dx \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \varphi(x_0 + \varepsilon) - \varphi(x_0 - \varepsilon) \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{q}{\epsilon_0} \cdot \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} 1 dx \right] \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \varphi_1(x_0 + \varepsilon) - \varphi_2(x_0 - \varepsilon) \right] &= -\frac{q}{\epsilon_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ (x_0 + \varepsilon) - (x_0 - \varepsilon) \right] \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ a_1(x_0 + \varepsilon) + V_1 - a_2(x_0 - \varepsilon - L) - V_2 \right] &= -\frac{q}{\epsilon_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ 2\varepsilon \right] \\ a_1x_0 - a_2(x_0 - L) + V_1 - V_2 &= 0 \\ \boxed{a_1x_0 + a_2(L - x_0) = \Delta V}, & \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\Delta V = V_2 - V_1$  é a diferença de potencial entre os planos. A equação (12), no fim das contas, afirma que  $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ , ou seja, que o potencial elétrico é uma função contínua no

ponto onde se localiza a carga<sup>3</sup>.

Pois, bem. Juntando as equações (11) e (12) podemos resolver o sistema  $2 \times 2$  sem dificuldade e calcular, finalmente,  $a_1$  e  $a_2$ . A solução do sistema é

$$a_1 = \frac{\Delta V}{L} + \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right) \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{\Delta V}{L} - \frac{q}{\epsilon_0} \frac{x_0}{L}.$$

Para ilustrar o gráfico do potencial, normalizemos os parâmetros do problema e façamos, em particular,  $V_1 = V_2 = 0$ ,  $L = 2$ ,  $x_0 = 1$  e  $q = 2\epsilon_0$  (o valor numérico). Com isso,  $a_1 = -a_2 = 1$  e, portanto, atualizando (10), temos a solução

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ -x + 2, & x \in [1, 2]. \end{cases} \quad (13)$$

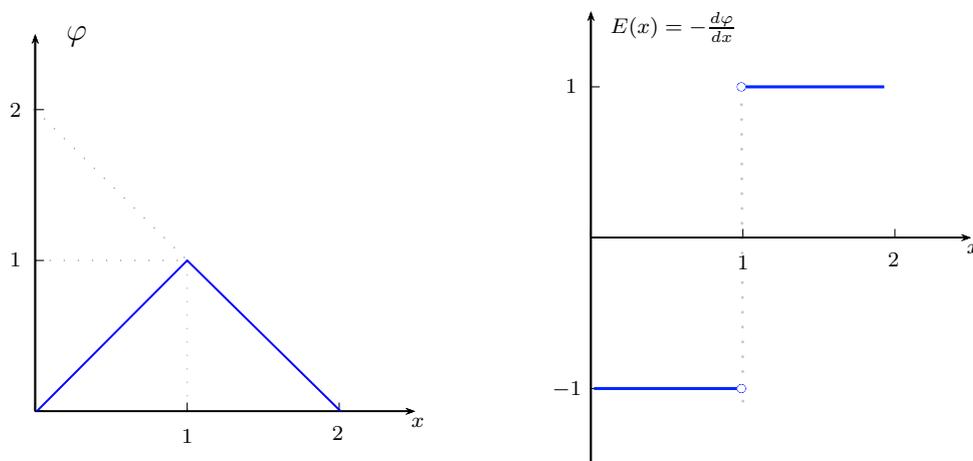


Figura 3: Gráfico do potencial elétrico (à esquerda) e do campo elétrico (à direita).

<sup>3</sup>Para mais informações, veja em *Jackson, J. D. Classical Electrodynamics. John Wiley, 1999*, o capítulo "Surface Distributions of Charges and Dipoles and Discontinuities in the Electric Field and Potential".

## 2º - CILINDRO CONDUTOR LONGO

Neste exemplo vamos explorar outro tipo de geometria, que não é a cartesiana. Consideremos um cilindro condutor e muito longo cujo eixo de simetria assenta-se sobre o eixo  $z$ .

Estamos interessados em calcular como é o potencial elétrico na região interior deste cilindro. A geometria cilíndrica do problema nos indica que o sistema de coordenadas mais apropriado para lidar com o problema é o sistema cilíndrico. Assim, a função potencial terá a dependência  $\varphi(r, \theta)$ , onde  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas do sistema polar usual. Repara que não estamos considerando a dependência em  $z$  do potencial porque supomos que o cilindro é muito longo e, portanto, já adiantamos o fato de o potencial ser simétrico em torno do eixo  $z$ .

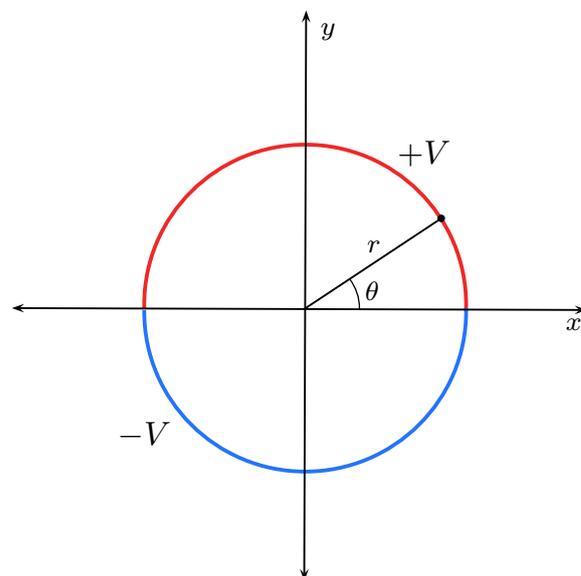


Figura 4: *Secção transversal do cilindro condutor.*

Escolhemos o cilindro tendo o raio de base igual a 1 por simplicidade, mas uma mudança para, digamos  $R$  positivo qualquer, não é difícil de ser feita. A região interior do cilindro passa a ser expressa, portanto, por  $0 \leq r < 1$  e o contorno que usaremos diz respeito ao potencial exatamente sobre o cilindro, i.e,  $r = 1$ . Usaremos uma famosa: dipolar. Se cortarmos uma secção meridiana, o cilindro divide-se em duas fatias. Uma delas será mantida a um potencial fixo e positivo  $+V$  e a outra a um potencial fixo e negativo  $-V$  de mesma magnitude. Este contorno pode ser apresentado como:

$$\begin{cases} \varphi(1, \theta) = +V & , 0 < \theta < \pi \\ \varphi(1, \theta) = -V & , \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (14)$$

A equação de Poisson que devemos resolver acaba se simplificando para a de Laplace, pois não há cargas elétricas dentro do cilindro. Assim, o potencial obedece a equação

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

que, em coordenadas cilíndricas fica,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (15)$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis. Substituindo na equação  $\varphi = R(r)S(\theta)$ , a reescrevemos como

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = 0$$

de onde, notando as dependências nas variáveis só  $r$  ou só  $\theta$  nas parcelas, separamos

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = k \quad \text{e} \quad \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = -k, \quad (16)$$

sendo  $k$  a constante característica da separação.

A equação na variável  $\theta$  é mais simples. Suas soluções são combinações lineares de  $\sin(\sqrt{k}\theta)$  e  $\cos(\sqrt{k}\theta)$ . Sendo a variável  $\theta$  cíclica, temos de observar que

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r, \theta + 2\pi), \quad \text{para } 0 \leq r < 1,$$

isto é, o potencial deve ser periódico na variável  $\theta$  a fim de ser univalorado quando, fixado o  $r$ ,  $\theta$  der uma volta completa. Dessa maneira, a única escolha para  $k$  de tal maneira que

$$\sin(\sqrt{k}\theta) = \sin(\sqrt{k}(\theta + 2\pi)) \quad \text{e} \quad \cos(\sqrt{k}\theta) = \cos(\sqrt{k}(\theta + 2\pi))$$

para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  é  $k = n^2$ , com  $n$  um número inteiro. Para cada  $n$  inteiro existe uma solução da forma

$$S_n(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), \quad \text{com } a_n \text{ e } b_n \text{ constantes a determinar.} \quad (17)$$

A equação para a variável  $r$  é conhecida como equação de Cauchy ou de Euler e é sabido que as soluções linearmente independentes<sup>4</sup> são  $r^n$  e  $r^{-n}$ . Então, para cada  $n$  inteiro, existe uma solução da forma

$$R_n(r) = c_n r^n + \frac{d_n}{r^n}, \quad (18)$$

a menos para  $n = 0$ , onde  $R(r) = \ln r$  ou  $R(r) = \text{const}$ .

Porém, o potencial deve ser uma função limitada no interior do cilindro. Para  $0 \leq r \leq 1$  não deve haver divergência. Assim, tanto a solução logarítmica quanto a solução  $r^{-n}$  devem ser excluídas. Descartamos a solução logarítmica e fazemos  $d_n = 0$ .

Finalmente, para cada  $n$  inteiro e positivo, temos uma solução da equação (15) na forma

$$\varphi_n = R_n(r)S_n(\theta) = r^n(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (19)$$

e, pela linearidade, a solução geral é, então,

$$\boxed{\varphi(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))} \quad (20)$$

sendo  $A_n$  e  $B_n$  as constantes a determinar que absorvem  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$ .

Através da condição de contorno que determinamos as constante  $A_n$  e  $B_n$ . Tomando  $r = 1$ , ficamos com

$$\varphi(1, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

e devemos calcular para quais números  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$  e  $B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}, \dots$  que  $\varphi(1, \theta) = \pm V$  nos intervalos  $(0, \pi)$  e  $(\pi, 2\pi)$ .

Lembrando que  $\sin(nx)$  e  $\cos(nx)$  são funções ortogonais<sup>5</sup>, conseguimos isolar

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) d\theta, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (21)$$

e

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) \sin(n\theta) d\theta. \quad (22)$$

<sup>4</sup>Uma substituição direta na equação comprova isso.

<sup>5</sup>Para  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_{n,m}, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi \delta_{n,m} \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0.$$

Veja *Mathematical Methods for Physicists*, George Arfken, qualquer edição; Ou *Análise de Fourier*, Murray R. Spiegel, da Coleção Schaum.

Aplicando o contorno (14) em (21), segue claramente  $A_n = 0$ , pois

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-V) d\theta = \frac{1}{\pi} (V \pi) - \frac{1}{\pi} (V \pi) = 0$$

e também <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) \cos(n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \cos(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \cos(n\theta) d\theta \\ &= \frac{V}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin(n\theta) \right]_0^{\pi} - \frac{V}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin(n\theta) \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{V}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin(0)) - \frac{V}{n\pi} (\sin(n \cdot 2\pi) - \sin(n\pi)) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Aplicando o contorno em (22), segue <sup>7</sup>

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1, \theta) \sin(n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V \sin(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-V) \sin(n\theta) d\theta \\ &= \frac{V}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(n\theta) \right]_0^{\pi} - \frac{V}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(n\theta) \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{V}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1) - \frac{V}{n\pi} (-\cos(n \cdot 2\pi) + \cos(n\pi)) \\ &= \frac{V}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) + \frac{V}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{2V}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \Rightarrow B_n = \frac{2V}{\pi} \times \begin{cases} 2/n & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned} \tag{24}$$

e, portanto, com os coeficientes  $A_n$  e  $B_n$  calculados, podemos atualizar (20) e, temos como solução geral do problema uma série de harmônicos ímpares no seno:

$$\boxed{\varphi(r, \theta) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} r^n \frac{\sin(n\theta)}{n}} \tag{25}$$

A expressão (25) é a função de potencial que queríamos. Por sorte, a soma envolvida é conhecida em termos de funções elementares <sup>8</sup>:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \right). \tag{26}$$

<sup>6</sup>  $\sin(n\pi) = \sin(n \cdot 2\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

<sup>7</sup>  $\cos(n \cdot 2\pi) = 1, \cos(n\pi) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$

<sup>8</sup> Veja *Análise de Fourier*, Murray R. Spiegel, da Coleção Schaum